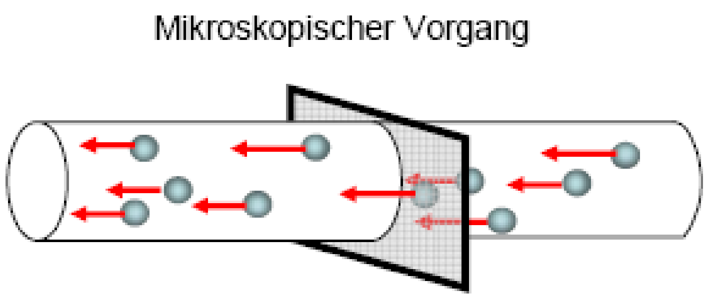
I. Mechanik

I.4 Fluid-Dynamik:
Strömungen in Flüssigkeiten und Gasen

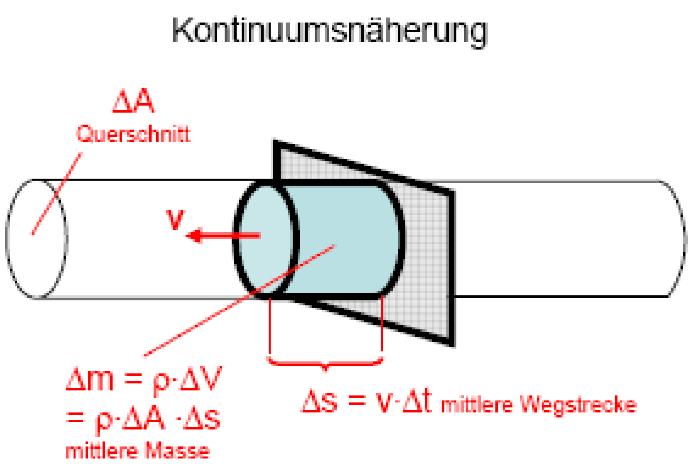
Stromdichte



- **Stromstärke** = durch einen Querschnitt (senkrecht zur Flussrichtung) fließende „Menge" pro Zeit („Menge" = Energie, Teilchenzahl, Ladung , etc.) hier: Masse

$$\boxed{I = \frac{\Delta m}{\Delta t}}$$ (eigentlich Vektor)

Einheit [i] = kg · s^{-1}



- **Stromdichte** = Stromstärke pro Fläche

$$j = \frac{i}{\Delta A} = \frac{\Delta m}{\Delta t \cdot \Delta A} = \rho \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta A}$$

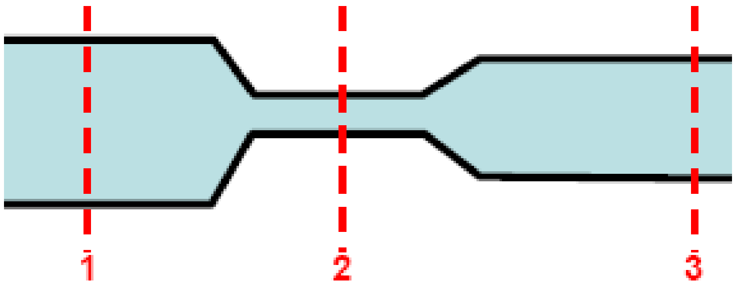
$$= \rho \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta A \cdot \Delta s}{\Delta A} = \rho \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho \cdot v$$

$$\boxed{j = \rho \cdot v}$$ (eigentlich Vektor)

Einheit [j] = kg · m^{-2}· s^{-1}

Kontinuitätsgleichung

- in fluiden Medien (Flüssigkeiten und Gasen) gilt die **Kontinuitätsgleichung (auch Massenerhaltzungssatz):** Materie geht nicht verloren. Pro Zeiteinheit fließt durch Fläche 1 die gleiche Masse hinein wir durch Fläche 3 hinaus; d.h. die Stromstärke an den Orten 1,2,3 ist überall gleich groß



$$I_1 = I_2 = I_3$$

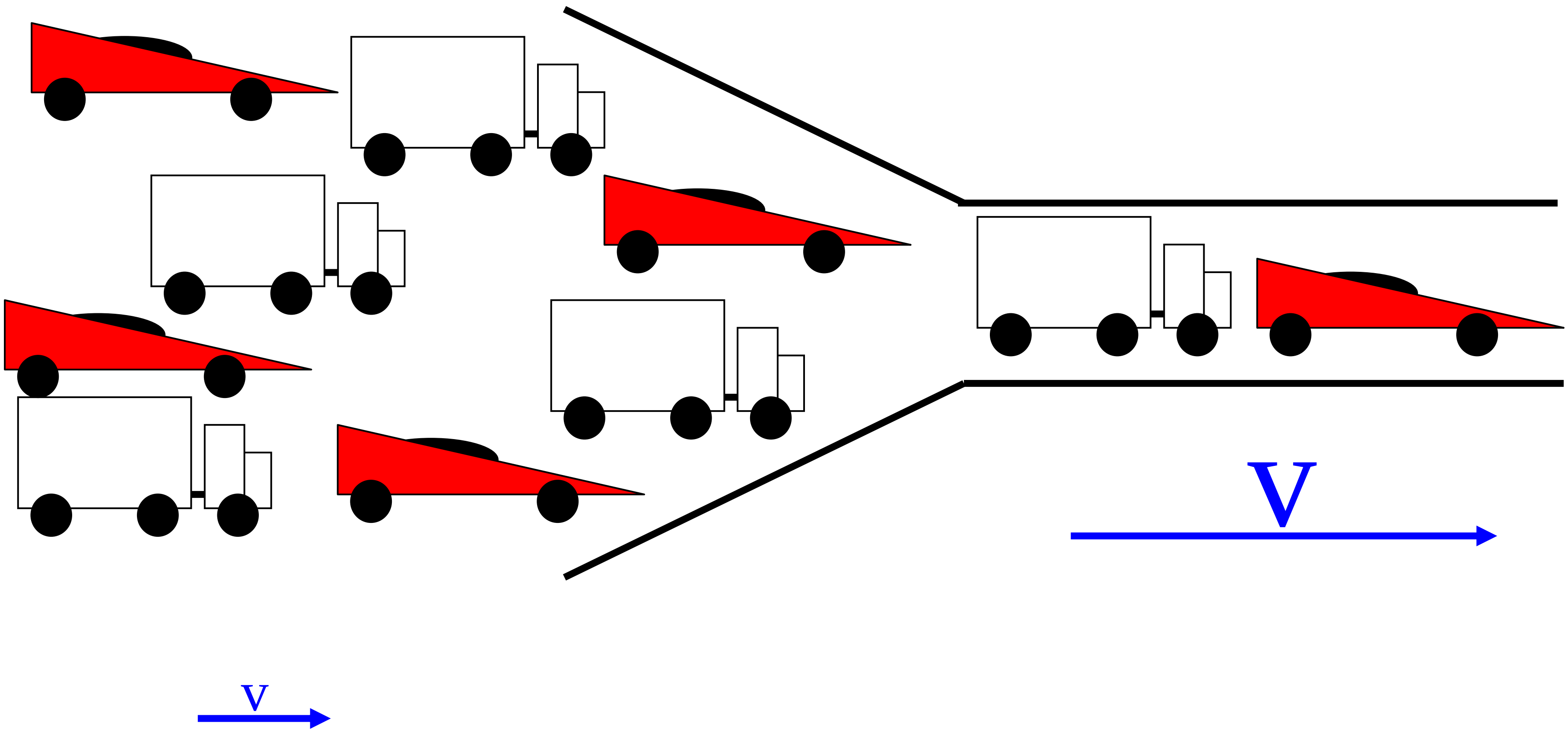
$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2 = \rho_3 \cdot A_3 \cdot v_3$$

Kontinuitätsgleichung: $\boxed{\rho \cdot A \cdot v = \mathrm{const}}$

Für Flüssigkeiten (inkompressibel: ρ = const) gilt:

$$\boxed{A \cdot v = \mathrm{const}}$$

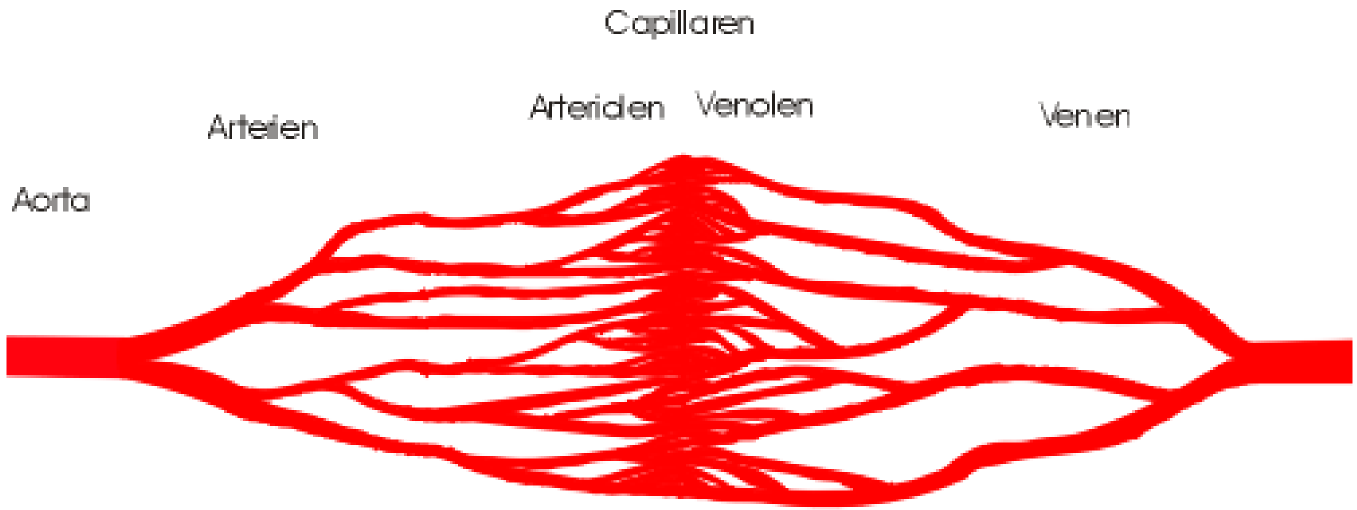
Fahrbahnverengung auf Autobahn



Um Massen-(Fahrzeug) durchsatz zu erhalten, müsste man Geschwindigkeit an Baustelle erhöhen !!!

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

Blutkreislauf



- Aufteilung des Blutstroms aus der Aorta ($A = 4\ cm^2$) auf sehr viele Kapillaren mit einer großen Gesamtfläche ($A = 4800\ cm^2$)

- mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Aorta: 21 cm/s; aus $A \cdot v = const \Rightarrow$ mittlere Strömungsgeschwindigkeit in den Kapillaren: 0.018 cm/s

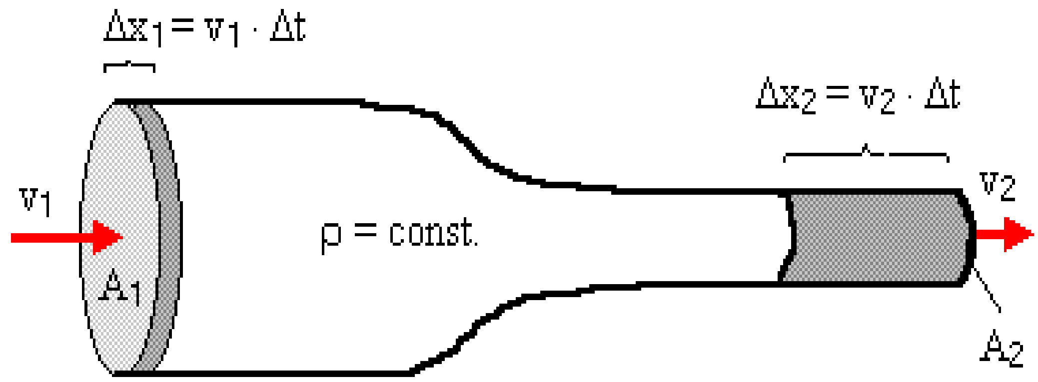
- Volumenstrom durch Aorta: $A \cdot v = 4\ cm^2 \cdot 21\ cm/s = 84\ cm^3/s$

$$= \frac{84\,cm^3}{60\,s} \cdot 60 = 5040 \frac{cm^3}{min} \approx 5l/min$$

- in einer Minute wird das gesamte Blutvolumen des Körpers umgewälzt

Bernoulli-Gleichung

Strömung durch verengtes Rohr



- Energieerhaltung:

Differenz der kinetischen Energien der Flüssigkeitsmenge m beim Ein- und Austritt aus Rohr:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

Zur Bewegung der Flüssigkeitsmenge m muss Arbeit geleistet werden:

Arbeit = Kraft * Weg = Druck * Fläche * Weg = Druck * Volumen

Nettoarbeit: $\Delta W = (p_1 - p_2) \cdot V = (p_1 - p_2) \cdot \frac{m}{\rho}$

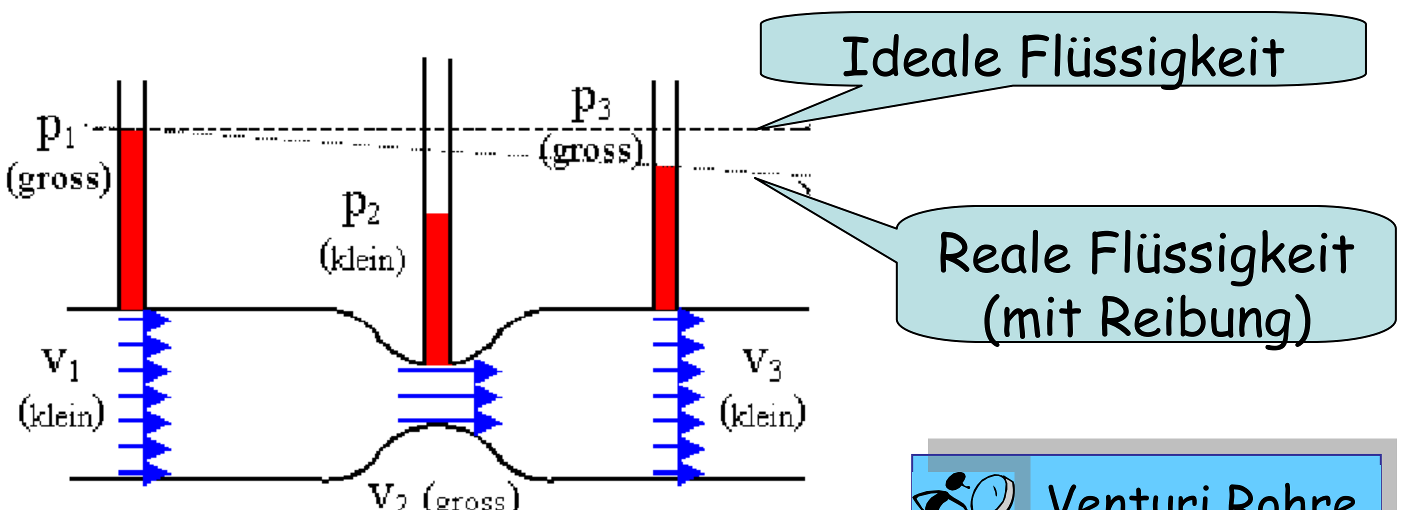
Energieerhaltung: $\Delta E_{kin} = \Delta W$

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_1^2 = \Delta W = (p_1 - p_2)\cdot\frac{m}{\rho}$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = (p_1 - p_2)\cdot\frac{1}{\rho} \quad \Big|*\rho$$

Bernoullische Gleichung

$$\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2 + p_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2 + p = \text{const} = p_{ges}}$$



v groß $\Rightarrow$ p klein

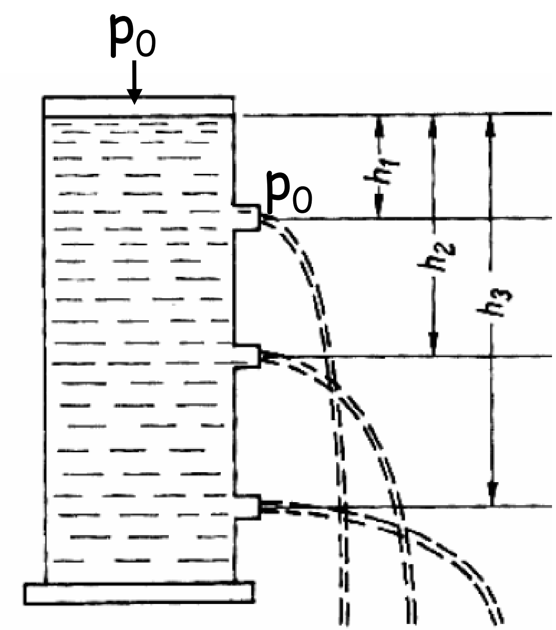
Venturi Rohre

Bei zusätzlicher Berücksichtigung des Schweredrucks:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2+\rho\cdot g\cdot h+p=p_{ges}=p_0}$$

allgemeine Form der **Bernoulli Gleichung**

Daniel Bernoulli
(1700- 1782)



auf Wasseroberfläche
und an Loch wirkt jeweils
der Luftdruck p_0

im <u>Innern</u> der Flüsigkeit in Höhe h_1
unterhalb der Wasseroberfläche:

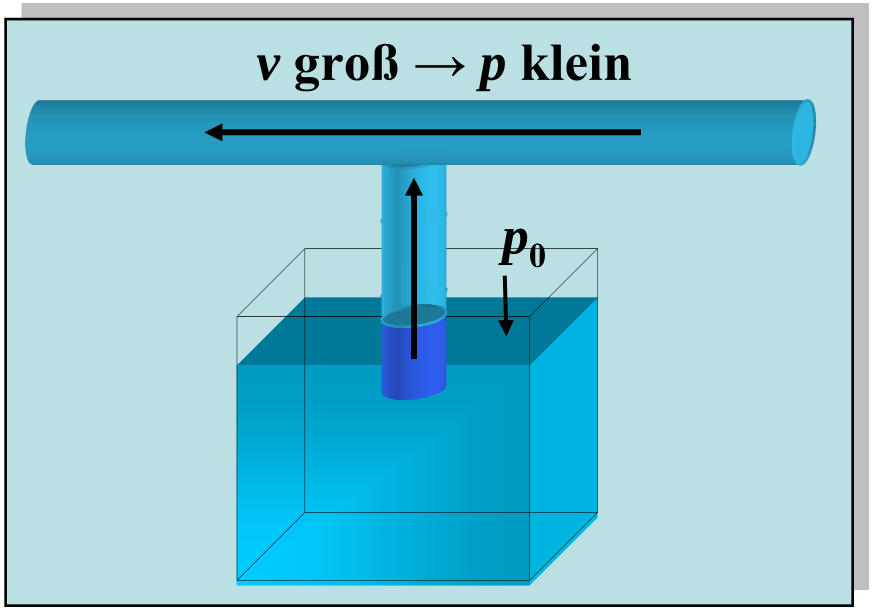
$$\left.\begin{array}{l} p_{ges}=p_0+\rho\cdot g\cdot h_1 \\ p_{ges}=p_0+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho\cdot g\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2$$

<u>außen:</u>

$$v=\sqrt{2\cdot g\cdot h_1}$$

Je höher Wassersäule, desto größer die Austrittsgeschwindigkeit

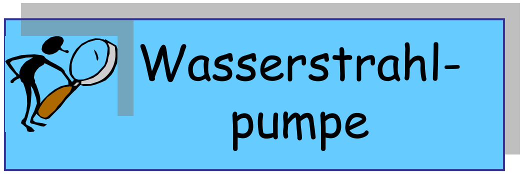
Anwendung: Wasserstrahlpumpe (Prinzip des Zerstäubers)



$$p = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

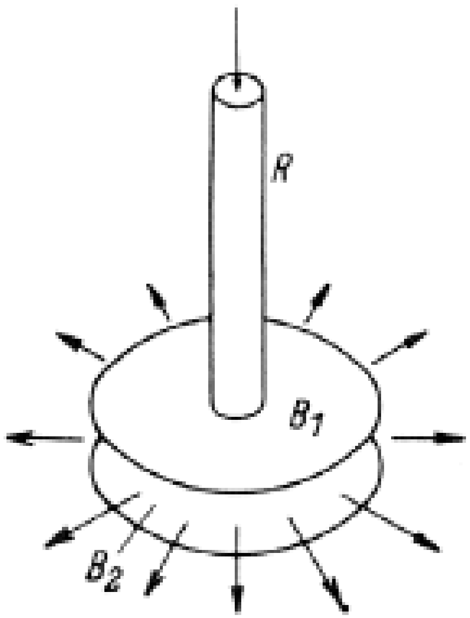
(Gravitation vernachlässigt)

Luftdruck p_0 drückt Wasser aus Gefäß, da Druck p im Rohr klein wegen großer Strömungsgeschwindigkeit v



Anwendung der Bernoulli Gleichung bei Gasen

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

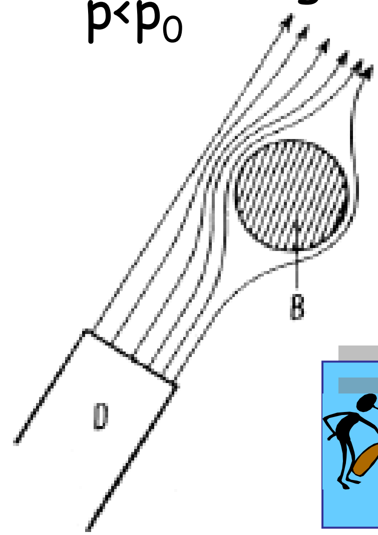


Aerodynamisches Paradoxon

$p<p_0$ zwischen den Platten

hohe Stromliniendichte deutet hohe Strömungs-geschwindigkeit an

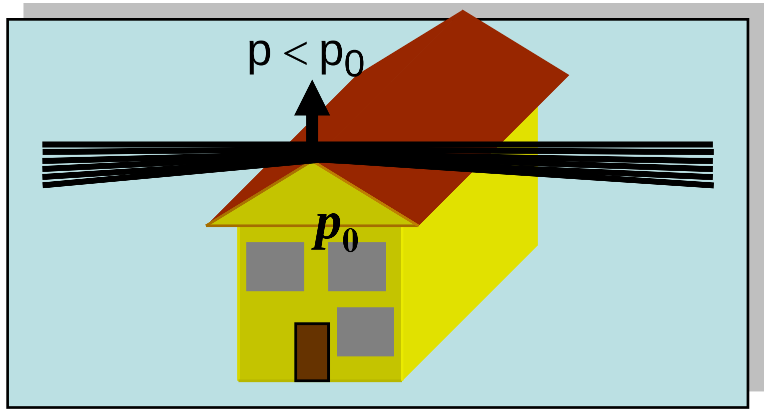
$p<p_0$



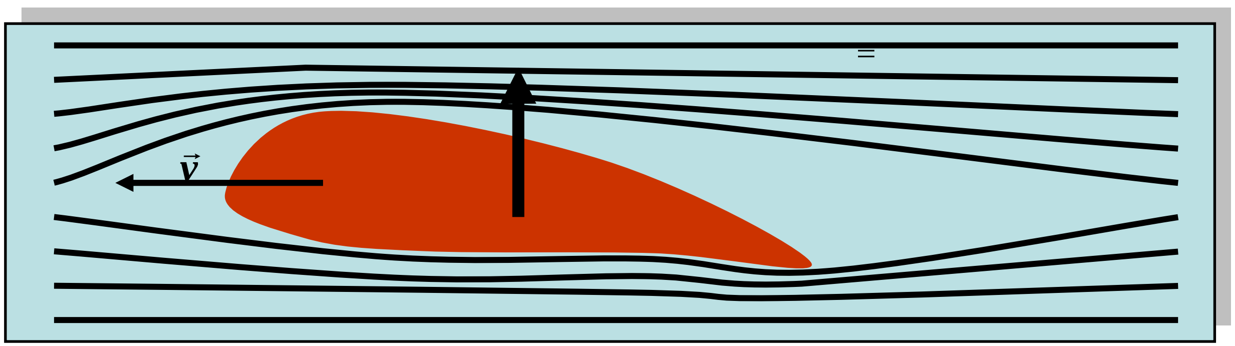
Tennisball in Luftstrom

Anwendung der Bernoulli Gleichung bei Gasen

Abdecken von Dächern im Sturm:



Dynamischer Auftrieb von Flugzeugen:



Druck oben:

$$p_{oben} = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{oben}^2$$

Druck unten:

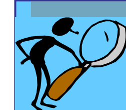
$$p_{unten} = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{unten}^2$$

- auf Oberseite des Flügels Zusammendrängen der Stromlinien

$\rightarrow v_{oben} > v_{unten} \quad \Rightarrow p_{oben} < p_{unten}$

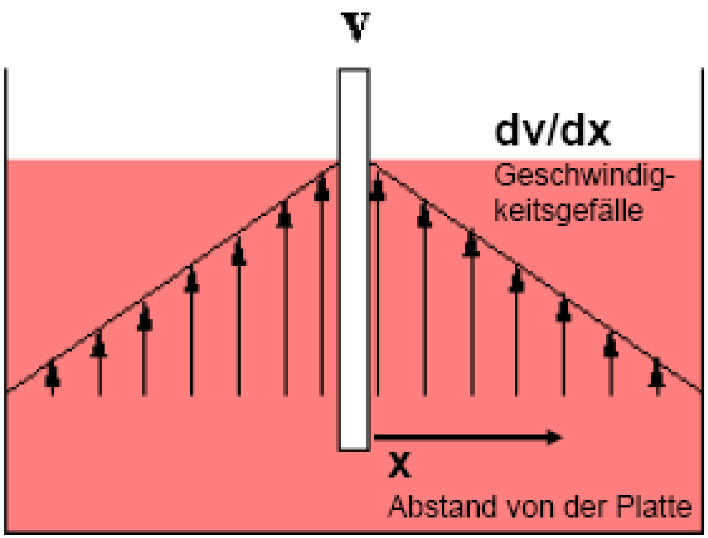
$$F_{Auftrieb} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \left(v_{oben}^2 - v_{unten}^2\right)$$

Flaps ausfahren !!



Bumerang

Reale Flüssigkeiten: Reibung



$$\boxed{F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx}}$$

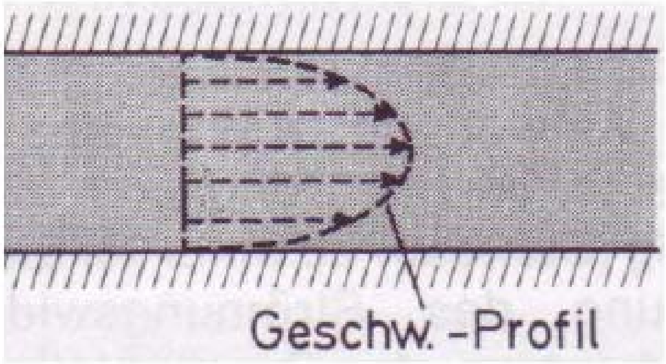
η: **Viskosität**

Einheit: $[\eta] = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = 1\ Pa \cdot s$

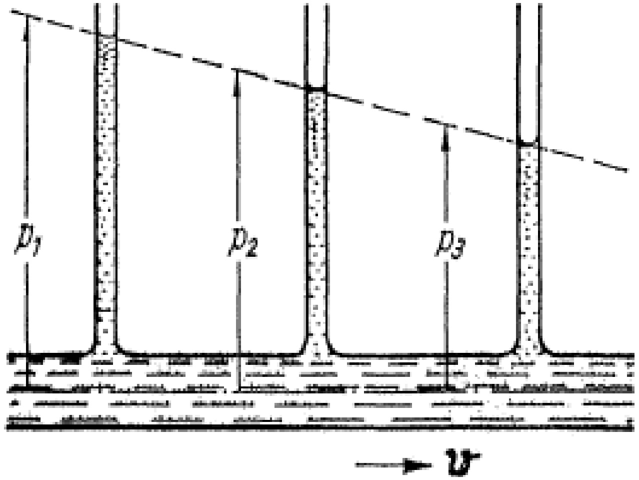
$\eta_{Blut} \approx 4 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$

- Eine Platte mit der Fläche *A* wird mit der Geschwindigkeit v aus einer Flüssigkeit gezogen
- Aufgrund der Reibung werden benachbarte Flüssigkeitsschichten mitgerissen; aber es existiert ein Geschwindigkeitsgefälle : $\frac{d\,v}{d\,x}$ mit zunehmendem Abstand x von der Wand nimmt die Geschwindigkeit der Schichten ab.
- die Reibungskraft ist parallel zur Plattenverscheibung gerichtet
- für ideale Flüssigkeiten (keine Reibung) ist η = 0 und datürlich auch dv/dx = 0

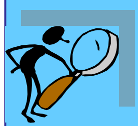
Strömung im Rohr mit Reibung



Reibung bewirkt ein parabolisches Strömungsprofil in einem Rohr



Reibung bewirkt einen Druckabfall entlang der Strömungsrichtung



parabolisches Strömungsprofil

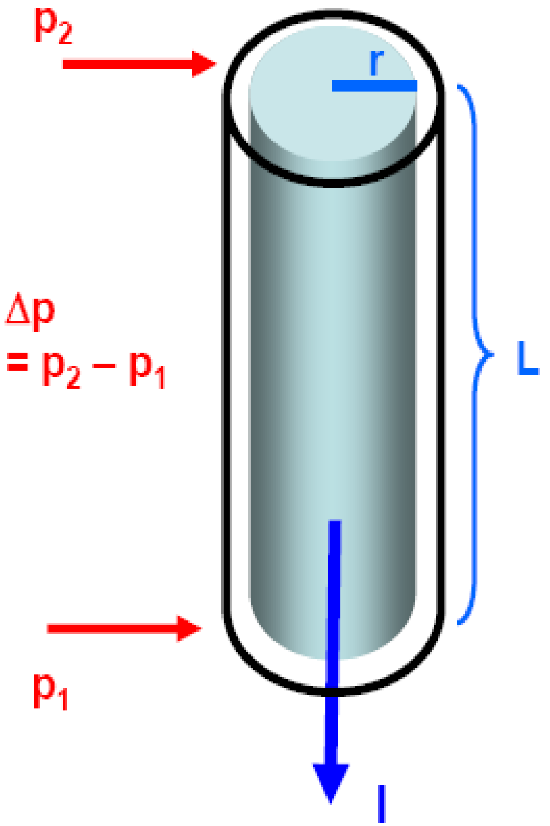
Strömungswiderstand R_s

$$\text{Stromstärke} = \frac{\text{Druckdifferenz}}{\text{Strömungswiderstand}}; \quad i = \frac{\Delta p}{R_S}$$

in reibungsfreien idealen Flüssigkeiten ist R_s=0 und Δp=0

Gesetz von Hagen - Poiseuille

Strömungswiderstand von Rohren



Flüssigkeit mit Viskosität η

$$R_S = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\eta \cdot L}{r^4}$$

$$i = \frac{\Delta p}{R_S} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4}{\eta \cdot L} \cdot \Delta p$$

Hagen-Poiseuille

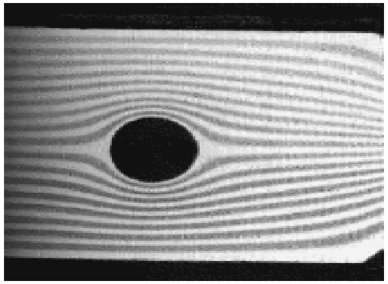
Stromstärke ändert sich mit der <u>4.Potenz</u> des Radius !!!

d.h. bei Verringerung des Radius einer Arterie/ Vene durch Verkalkung um 20% nimmt der Blutdurchfluss ab auf $(0{,}8)^4 = 0{,}41$ also um einen Faktor 2,4.

Achtung: entsprechende Erhöhung des Blutdurchflusses bei Ballonerweiterung von Arterien !!

Laminare und turbulente Strömung

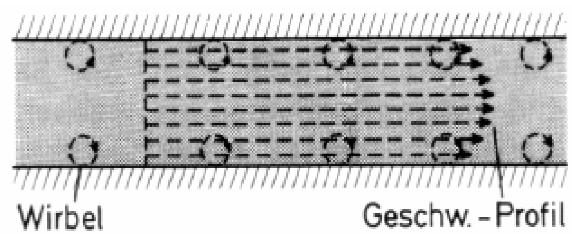
- **laminare Strömung:** keine Durchmischung der Stromfäden

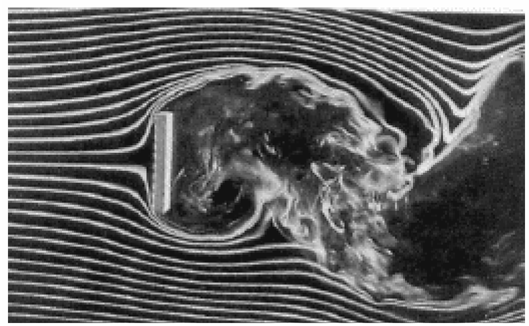


laminare Strömung: Stromfäden

- bei Erhöhung des Druckunterschieds tritt Wirbelbildung auf:

turbulente Strömung:





laminare → turbulente Strömung

- Die **Reynoldsche Zahl** liefert ein Kriterium für das Strömungsverhalten:

Geometrie

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot r}{\eta}$$

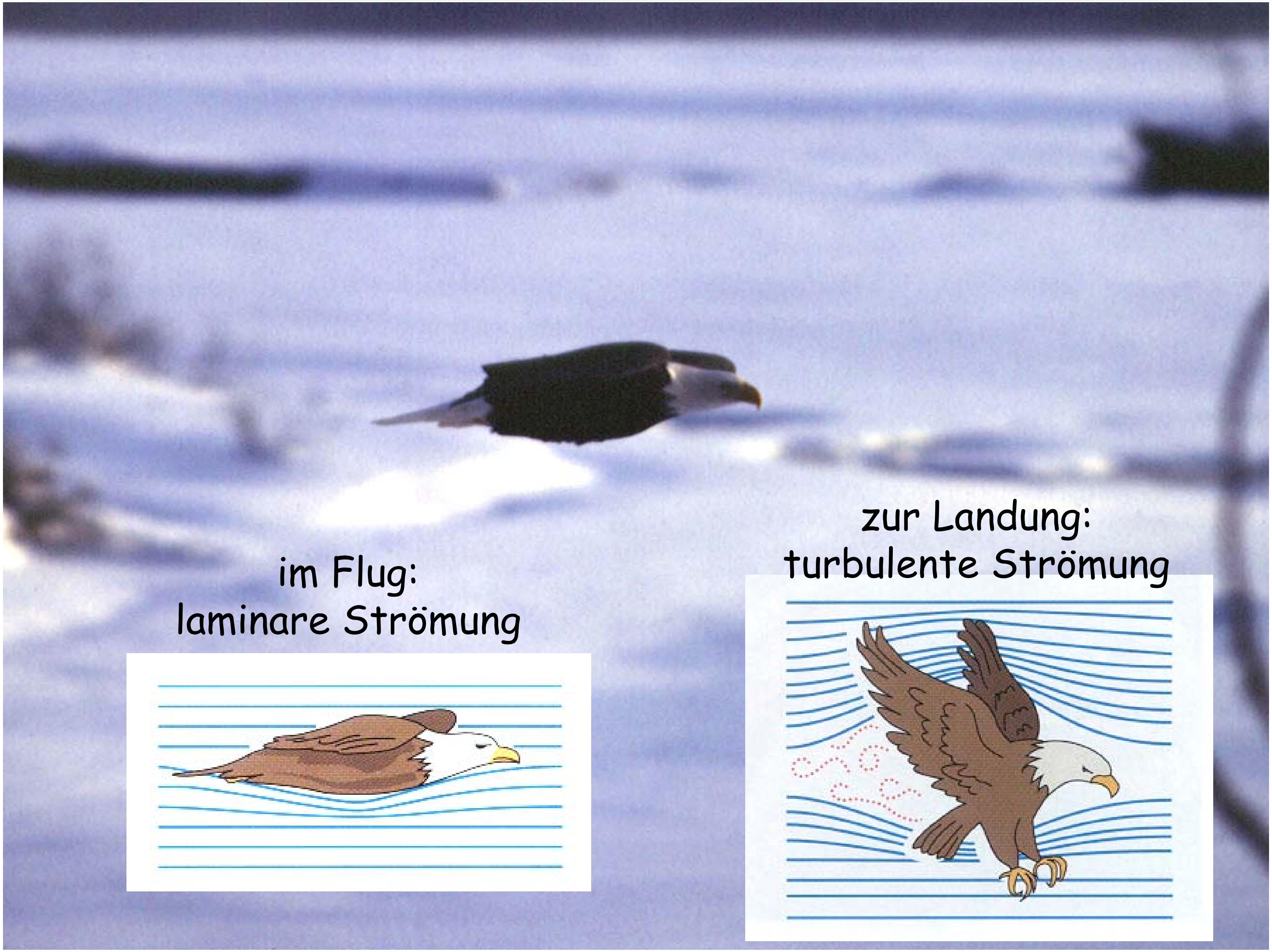
Materialparameter

Re < 2000: **laminar**

Re > 2000: **turbulent**

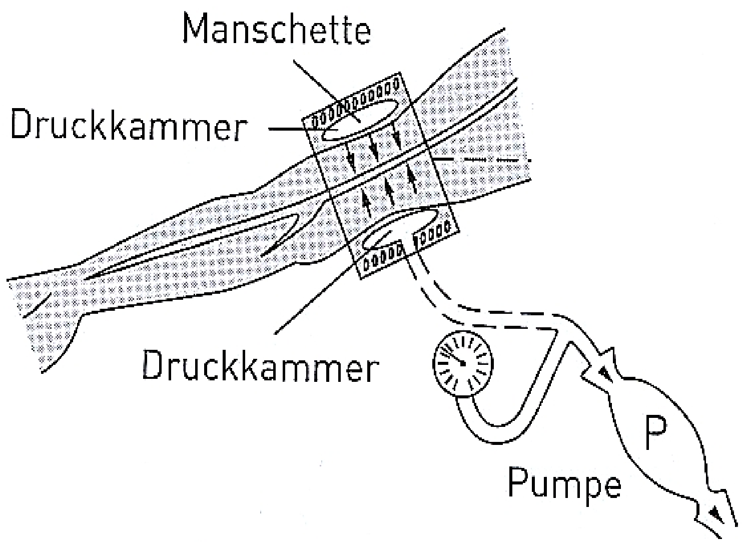
Blut in Aorta: Re ≈ 500 ⇒ Strömung laminar

Raubvogel



im Flug:
laminare Strömung
zur Landung:
turbulente Strömung

- **Blutdruckmessung an Armarterie** (nach Riva-Rocci)



Systole: Zusammenziehen der Herzkammern und Ausstoß arteriellen Bluts: Herzschlag

Diastole: Erschlaffen der Vorhöfe und Auffüllen mit venösem Blut; Entspannung zwischen den Herzschlägen

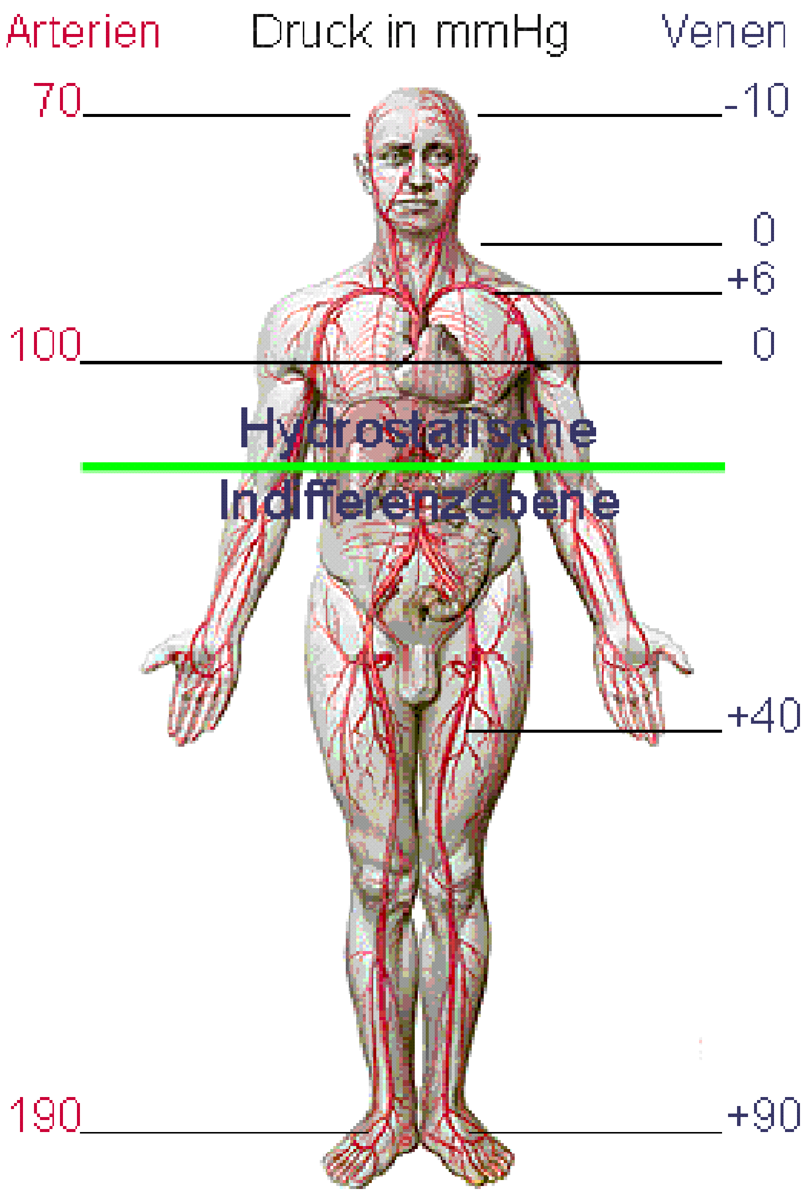
1. durch Manschettendruck wird Arterie abgedrückt $p > p_{sys}$
2. Manschettendruck absenken: Blut beginnt turbulent zu strömen $\mathbf{p = p_{sys}}$ Stoßgeräusche durch Herzschlag
3. Manschettendruck weiter absenken: gleichmäßige Fließgeräusche: $\mathbf{p = p_{dia}}$

typische Werte
p_{sys}/p_{dia} = 120 / 80 mm Hg

physikalische Einheiten:
p_{sys}/p_{dia} = 16,0/ 10,7 kPa

1 atm = 101,3 kPa = 760 mm Hg

Blutdruckmessung



Schweredruck ρ·g·h berücksichtigen !

Druckvariation durch Schwerkraft:
Gehirn: 8,8 kPa
Fuß: 26,5 kPa

$$\rho \cdot g \cdot h =$$
$$= 1{,}03 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 1{,}75\,m = 17{,}7\,kPa$$

wichtig !!

Bei Blutdruckmessung Manschette auf Höhe des Herzens, damit keine Fehler durch Schweredruck-unterschiede ρ·g·h auftreten

Zusammenfassung

- **Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen**

- <u>**ideale** Flüssigkeiten (keine Reibung)</u>

  - **Kontinuitätsgleichung**: konstanter Massendurchsatz

    $$\boxed{\rho \cdot A \cdot v = \text{const}}$$

  - **Bernoulli Gleichung**: $\boxed{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p = p_0 = \text{const}}$

    Summe aus dynamischem und statischem Druck ist konstant

- <u>**reale** Flüssigkeiten</u>

  - Reibung bei Flüssigkeitsströmungen: Viskosität η

  - Strömungsverhalten (**laminar** oder **turbulent**) bestimmt durch **Reynoldsche** Zahl